COMPLEMENTE DE MATEMATICA - 1

Mircea V. Rusu
Facultatea de Fizica
Universitatea Bucuresti
mvrusu@yahoo.com

2005

Cuprins

1. Dezvoltări in serie.
2. Calcul diferenţial si integral cu aplicaţii.
3. Elemente de calcul variaţional si probleme de optim.
4. Elemente de ecuaţii diferenţiale si rezolvări standard.
5. Metode numerice de analiza si modelare.
6. Ecuaţii diferenţiale neliniare si analiza calitativa.
7. Geometria fractala.
8. Probabilitatea si analiza statistica.
9. Analiza complexa
10. Varia

Motivatia:

- *rezolvarea unor probleme ce apar in activitatea ştiinţifica curenta*
- *prelucrarea datelor experimentale*
- *realizarea si rezolvarea modelelor*
- *utilizarea calculatorului*

1. Metode numerice

1.1 Introducere

- Soluţia a unei probleme de fizica, chimie, biologie etc., care a fost obţinuta sub forma unei expresii matematice, de exemplu ca o combinaţie de diferite funcţii, derivate, integrale, trebuie aduse la stagiul „numeric”, adică soluţia finala trebuie sa fie nişte numere care apoi sa poată fi comparate.
- In matematica elementara suntem obişnuiţi, si nici nu ne interesează altceva, decât soluţii exacte. Din păcate de foarte puţine ori in practica de cercetare astfel de soluţii pot fi obţinute. Chiar ecuaţii simple cum ar fi o ecuaţie algebrica cu n>2 poate devenii o problema extrem de complicata sau chiar imposibila.
- Din aceasta cauza dezvoltarea metodelor numerice este fundamentala, iar existenta calculatoarelor electronice este esenţiala pentru rezolvarea problemelor reale.
- Matematica superioara ne da posibilitatea acestui lucru.

Exista doua situaţii sau doua direcţii in care calculele trebuie sa fie efectuate si anume:

a)- plecând de la un model teoretic exprimat prin legi si funcţii sa se compare consecinţele cu datele experimentale.

b)- plecând de la o serie de date numerice sa se infereze o concluzie (valoare medie, tendinţa, comparare cu un model teoretic etc.,)

Diferența intre cazurile a) si b)

- Modelele teoretice conduc aproape totdeauna la rezultate exprimate prin funcţii in general continue, adică in care se poate cunoaşte valoarea unei variabile in funcţie de alta, pentru orice valoare a variabilelor. Variabilele se presupun ca *variază continuu*, si putem alege orice valoare dorim. Aceasta situaţie ne conduce la ideea ca putem compara orice data experimentala cu una teoretica, ceea ce nu este totdeauna posibil.

Cazul a)

- Avem in acest caz modele teoretice exprimate prin funcţii sau ecuaţii. Soluţiile analitice trebui aduse la valori numerice ceea ce presupune o serie de manipulări cum ar fi *rezolvarea aproximativa a ecuaţiilor*, aproximarea unor dependente complicate prin altele mai simple, aducerea ecuaţiilor analitice la forme utilizabile in calculul pe calculator, sau la forma integrării aproximative sau a utilizării diferenţelor finite, etc.

Cazul b)

In acest caz putem avea mai multe situaţii

- - facem măsurători asupra unei mărimi făcând presupunerea (sau ştiind) ca mărimea care trebuie măsurata nu trebuie sa varieze in timp: *sistem staţionar* ($\{x_i\}$;
- - facem măsurători asupra unei mărimi care poate varia in timp si obţinem ceea ce se numeşte o *serie temporala* ($x_i(t_i)$);
- - facem o măsurătoare asupra unei mărimi care depinde alta mărime (y_i funcţie de x_i); si obţinem *perechi de valori* $\{x_i, y_i\}$;
- - sau, facem măsurători asupra mai multor mărimi "simultan" $\{x_i, y_i, z_i, u_i, v_i \ldots\ldots\}$.

Esantionarea

- Daca avem valori provenite de la măsurători suntem totdeauna in situaţia de a obţine date la diferite momente, pentru diferite valori fixate ale variabilei independente, adică totdeauna avem de a face cu un proces de *eşantionare*.
- Acest lucru determina faptul ca nu avem orice date la îndemâna si deci totdeauna va trebuie sa ţinem cont de aceasta aproximaţie.

Esantionarea

- Eşantionarea poate sa modifice si sa ne conducă uneori pe piste false in interpretarea datelor. Eşantionarea is are limitele ei.
- Având un set de date numerice trebuie sa le tratam matematic astfel încât sa putem ajunge la nişte concluzii corecte de natura fizica.

Caracter aleator al masuratorilor

- La toate acestea se adaugă un aspect fundamental de neeliminat si anume *aspectul aleator* al măsurătorilor sau chiar a fenomenelor studiate. Ca atare in mod inevitabil o tratare statistica a datelor si a modelelor ca si a rezultatelor care conduc la concluzii fizice, este absolut necesara.

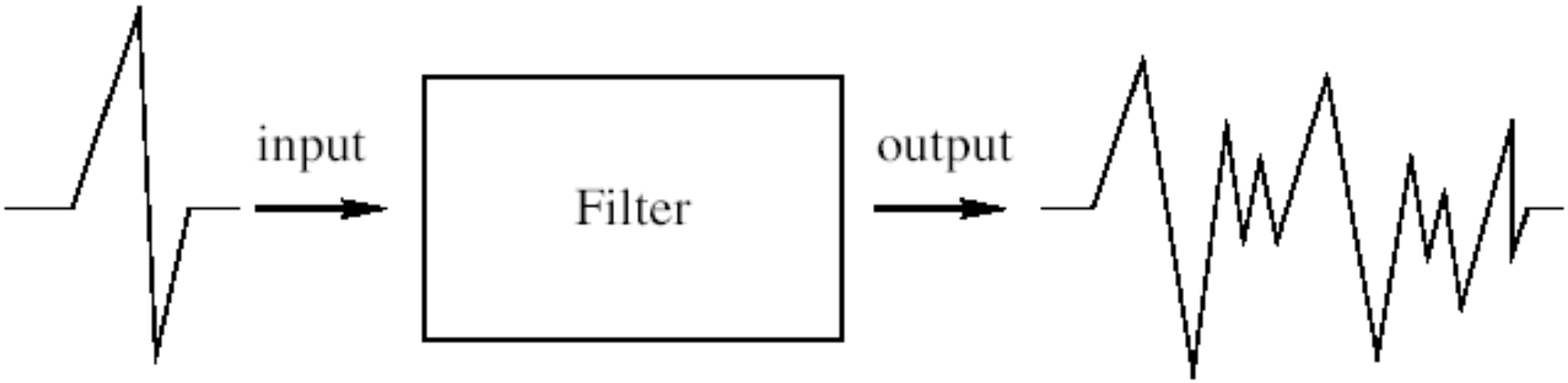
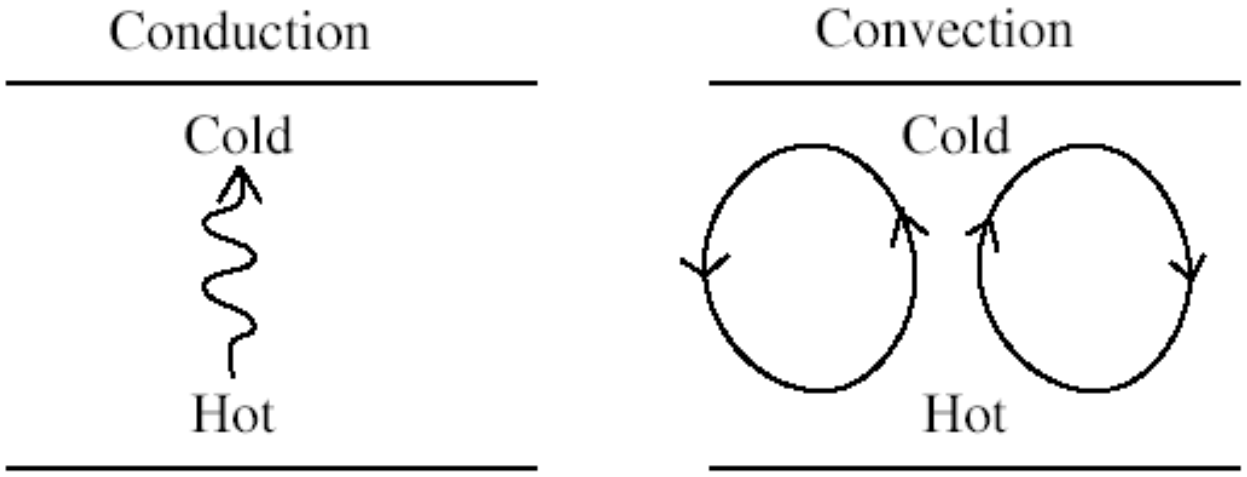
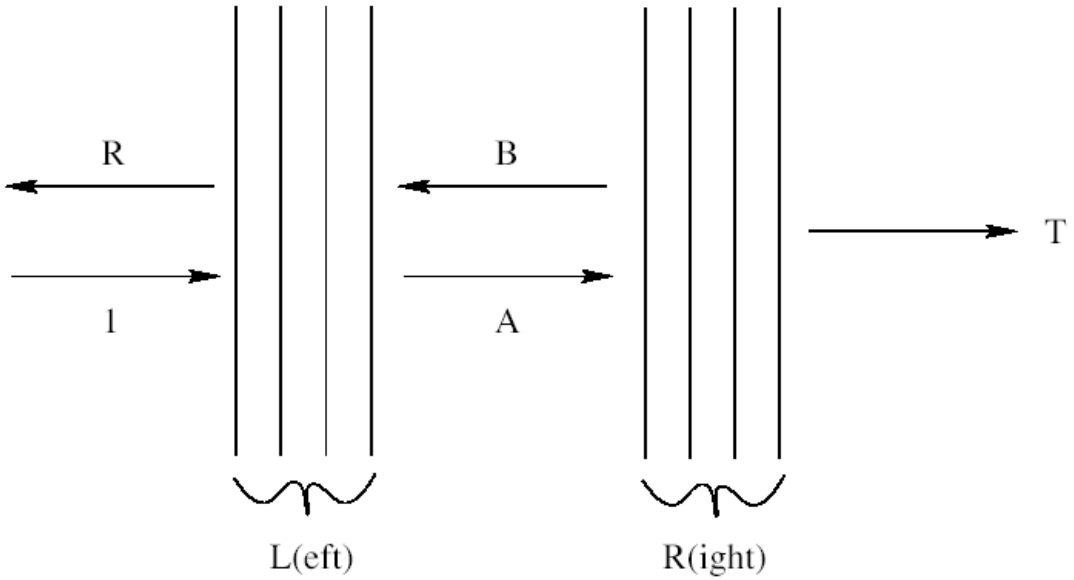


Figure 11.2: Schematic representation of a linear filter.

Fenomene





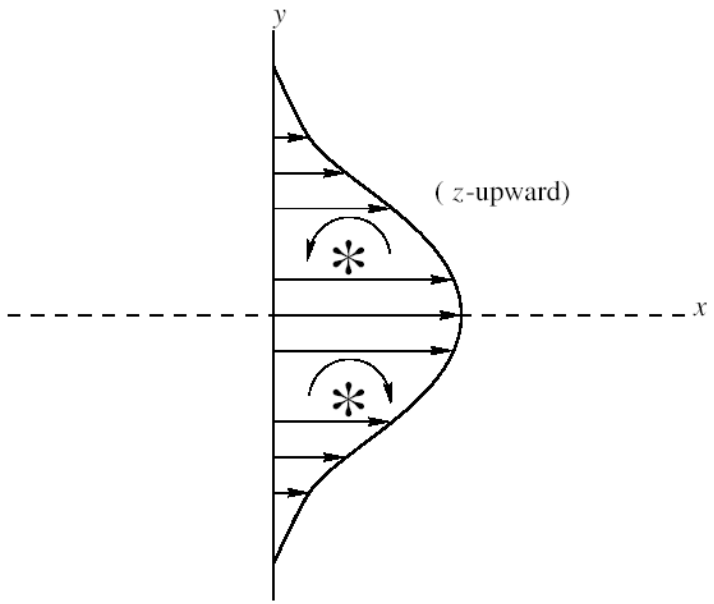
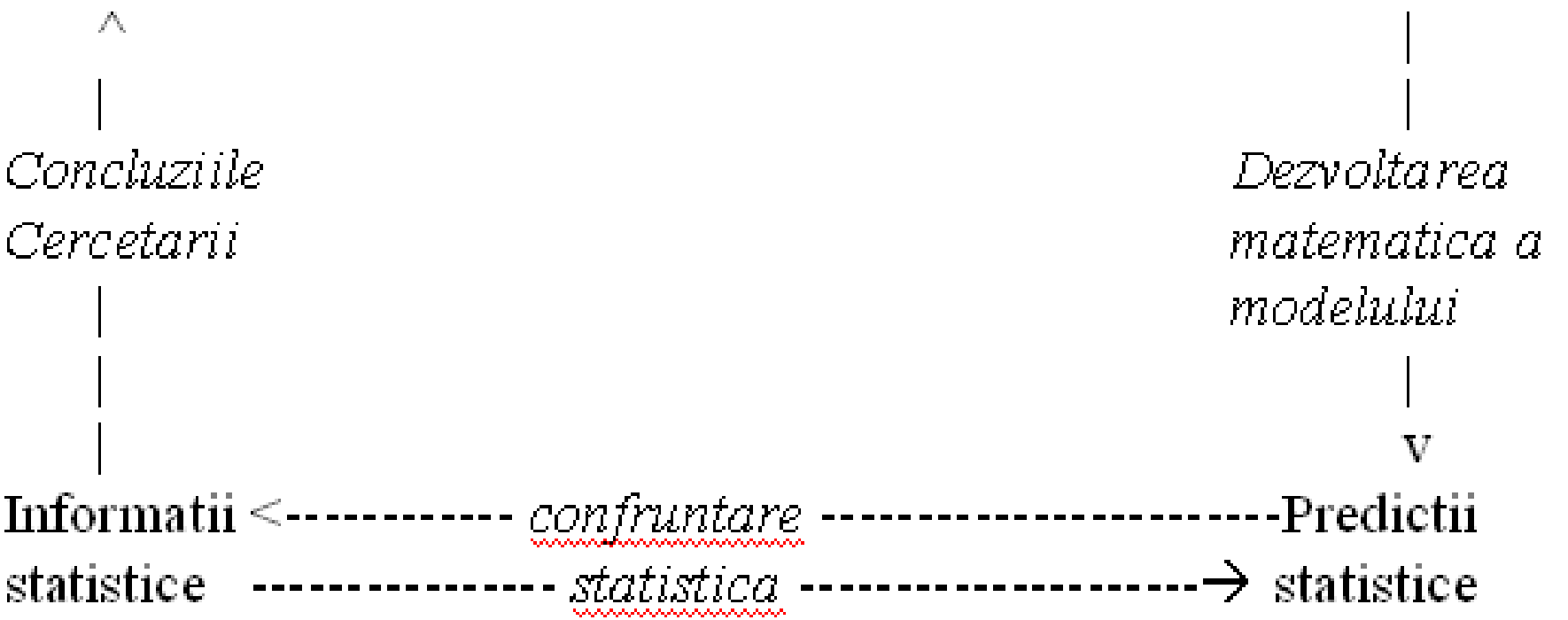


Figure 5.4: Sketch of the flow field for a shear flow.

Modelarea si statistica

Statistica ca metoda de studiu a fenomenelor naturale.



1.1.1 Numerele

Exista *numere întregi* formate din şirul numerelor naturale

1, 2, 3, 4, 5, ……, *n*, …….

- In timp, din motive practice dar si teoretice s-a lărgit acest sir cu aşa numitele *numere negative* (întregi)

….. , -*n,* ….., -4, -3, -2, -1,

- si cu un simbol care să indice *absenţa* unei mărimi, simbolul 0 (*zero*).
- Numerele pozitive, negative împreună cu zero, formează *mulţimea numerelor întregi.*
- Raportul a doua numere întregi (*n/m*) poartă numele de *fracţie* sau *număr fracţionar*.
- Dintre acestea cele care se împart exact prin doi au fost numite *numere pare*, iar cele care nu se împart exact au fost denumite *numere impare*.
- Alte tipuri de numere sunt *numerele prime*, numere naturale care se caracterizează prin faptul că se pot divide doar prin
- ± 1 , sau prin $\pm p$.

- Mulţimea tuturor numerelor obţinute astfel se numeşte *mulţimea numerelor raţionale*.
- Pentru toate aceste numere cele patru operaţii simple ale aritmeticii sunt aplicabile.

- Situaţii reale fac ca această mulţime să nu poată cuprinde toate cazurile pe care le putem întâlni. De exemplu nu putem exprima prin numere raţionale raportul dintre lungimea circumferinţei cercului şi diametrul lui. Altfel spus numerele de tipul nu pot fi puse sub forma *n/m*. Ele au fost denumite *numere iraţionale* şi este contribuţia anticilor la recunoaştere acestui lucru (număr „fără raport”):

- Cu aceasta s-a completat într-un fel lista tipurilor de numere în sensul că mulţimea numerelor raţionale, iraţionale, pozitive sau negative sau zero, formează *mulţimea numerelor reale*.

- O altă metodă de obţinere a unor numere iraţionale este aceea a găsirii rădăcinilor unui polinom cu coeficienţi întregi:
- Aceste numere se numesc *numere algebrice reale*. Există însă şi o serie de numere iraţionale care nu se pot obţine ca rădăcină a unui polinom de forma dată mai sus şi care deci nu fac parte din mulţimea numerelor algebrice (1951, Liouville). Ele au fost denumite *numere transcendente.* Printre aceste numere transcendente se află

e = 2,718282…. baza logaritmilor naturali, (Ch. Hermite, 1873)

π =3,141593……, (F. Lindemann, 1882)

C = 0,577216…….., constanta lui L. Euler,

ϕ = 1,61803….. sau 0,61803…, numărul de „aur”,

δ = 4,6692 ……., constanta lui Feingenbaum,

……

1.1.2 Operatii cu numere

- a) Transformarea numerelor fracţionare în numere zecimale,
- b) Reprezentarea numerelor reale pe o axă,
- c) Reprezentarea zecimală a unui număr,
- d) Valori apropiate, trunchiere, numere aproximative,
- e) Eroare, propagarea erorilor,

1.2 Tratarea matematica a datelor experimentale

1.2.1 *Datele tabelare*

- In activitatea practica avem de obicei de a face cu tabele de date care sa zicem ca au doua coloane, *x* si *y*, si care cuprind datele experimentale. Aceasta este o *forma tabulara* care ne este cunoscuta de exemplu si de la tabelele de funcţii trigonometrice sau de logaritmi sau de exemplu tabelele care dau temperatura de fierbere a unui lichid funcţie de presiune: *variabila independenta* este presiunea, *variabila dependenta* este temperatura.
- Utilizarea unei astfel de tabele de date devine mai complicata atunci când dorim sa aflam o valoare a lui y pentru un x inexistent in tabele. In acest caz avem doua situaţii si anume valoarea *y* căutata corespunde unui *x* existenta intre cea mai mica si cea mai mare valoare tabelata, si se numeşte *interpolare*, sau este in afara domeniului si se numeşte *extrapolare*. Fiecare din aceste doua cazuri trebuie tratat diferit.

sinus

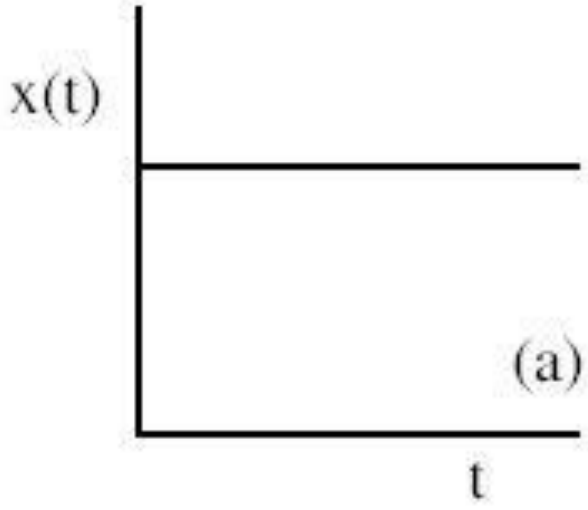
grade	0′ →	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0	0,0000	0,0029	0,0058	0,0087	0,0116	0,0145	0,0175	89
1↓	0,0175	0,0204	0,0233	0,0262	0,0291	0,0320	0,0349	88
2	0,0349	0,0378	0,0407	0,0436	0,0465	0,0494	0,0523	87
3	0,0523	0,0552	0,0581	0,0610	0,0640	0,0669	0,0698	86
4	0,0698	0,0727	0,0756	0,0785	0,0814	0,0843	0,0872	85
5	0,0872	0,0901	0,0929	0,0958	0,0987	0,1016	0,1045	84
6	0,1045	0,1074	0,1103	0,1132	0,1161	0,1190	0,1219	83
7	0,1219	0,1248	0,1276	0,1305	0,1334	0,1363	0,1392	82
8	0,1392	0,1421	0,1449	0,1478	0,1507	0,1536	0,1564	81
9	0,1564	0,1593	0,1622	0,1650	0,1679	0,1708	0,1736	80
10	0,1736	0,1765	0,1794	0,1822	0,1851	0,1880	0,1908	79
11	0,1908	0,1937	0,1965	0,1994	0,2022	0,2051	0,2079	78
12	0,2079	0,2108	0,2136	0,2164	0,2193	0,2221	0,2250	77
13	0,2250	0,2278	0,2306	0,2334	0,2363	0,2391	0,2419	76
14	0,2419	0,2447	0,2476	0,2504	0,2532	0,2560	0,2588	75
15	0,2588	0,2616	0,2644	0,2672	0,2700	0,2728	0,2756	74
16	0,2756	0,2784	0,2812	0,2840	0,2868	0,2896	0,2924	73
17	0,2924	0,2952	0,2979	0,3007	0,3035	0,3062	0,3090	72
18	0,3090	0,3118	0,3145	0,3173	0,3201	0,3228	0,3256	71
19	0,3256	0,3283	0,3311	0,3338	0,3365	0,3393	0,3420	70
20	0,3420	0,3448	0,3475	0,3502	0,3529	0,3557	0,3584	69
21	0,3584	0,3611	0,3638	0,3665	0,3692	0,3719	0,3746	68
22	0,3746	0,3773	0,3800	0,3827	0,3854	0,3881	0,3907	67
23	0,3907	0,3934	0,3961	0,3987	0,4014	0,4041	0,4067	66
24	0,4067	0,4094	0,4120	0,4147	0,4173	0,4200	0,4226	65
25	0,4226	0,4253	0,4279	0,4305	0,4331	0,4358	0,4384	64
26	0,4384	0,4410	0,4436	0,4462	0,4488	0,4514	0,4540	63
27	0,4540	0,4566	0,4592	0,4617	0,4643	0,4669	0,4695	62
28	0,4695	0,4720	0,4746	0,4772	0,4797	0,4823	0,4848	61
29	0,4848	0,4874	0,4899	0,4924	0,4950	0,4975	0,5000	60
30	0,5000	0,5025	0,5050	0,5075	0,5100	0,5125	0,5150	59
31	0,5150	0,5175	0,5200	0,5225	0,5250	0,5275	0,5299	58
32	0,5299	0,5324	0,5348	0,5373	0,5398	0,5422	0,5446	57
33	0,5446	0,5471	0,5495	0,5519	0,5544	0,5568	0,5592	56
34	0,5592	0,5616	0,5640	0,5664	0,5688	0,5712	0,5736	55
35	0,5736	0,5760	0,5783	0,5807	0,5831	0,5854	0,5878	54
36	0,5878	0,5901	0,5925	0,5948	0,5972	0,5995	0,6018	53
37	0,6018	0,6041	0,6065	0,6088	0,6111	0,6134	0,6157	52
38	0,6157	0,6180	0,6202	0,6225	0,6248	0,6271	0,6293	51
39	0,6293	0,6316	0,6338	0,6361	0,6383	0,6406	0,6428	50
40	0,6428	0,6450	0,6472	0,6494	0,6517	0,6539	0,6561	49
41	0,6561	0,6583	0,6604	0,6626	0,6648	0,6670	0,6691	48
42	0,6691	0,6713	0,6734	0,6756	0,6777	0,6799	0,6820	47
43	0,6820	0,6841	0,6862	0,6884	0,6905	0,6926	0,6947	46
44	0,6947	0,6967	0,6988	0,7009	0,7030	0,7050	0,7071	↑45
45	0,7071	0,7092	0,7112	0,7133	0,7153	0,7173	0,7193	↑44
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′ ←	grade

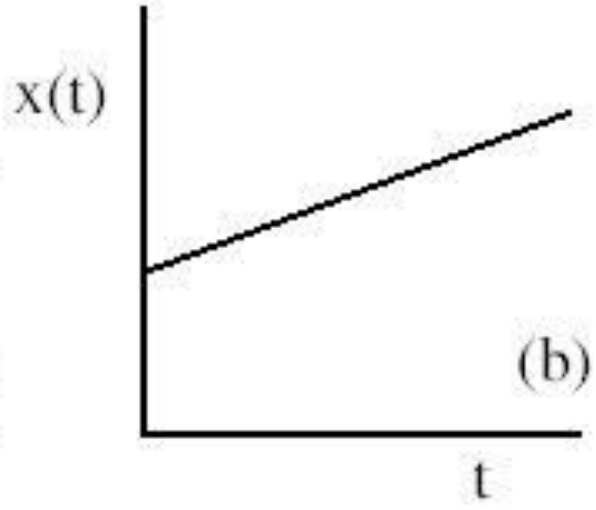
cosinus

sinus

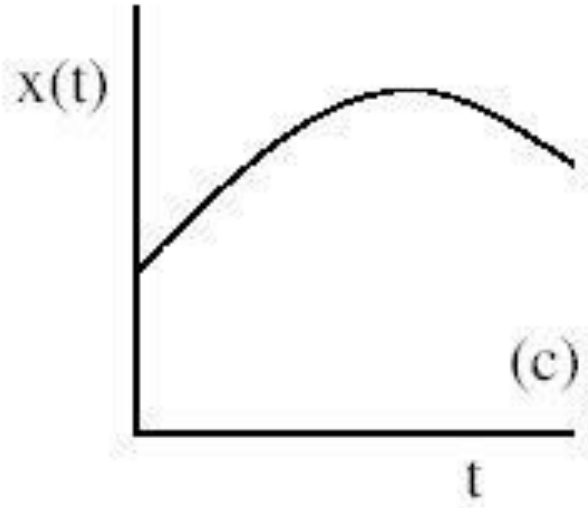
grade	0′ →	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
45↓	0,7071	0,7092	0,7112	0,7133	0,7153	0,7173	0,7193	44
46	0,7193	0,7214	0,7234	0,7254	0,7274	0,7294	0,7314	43
47	0,7314	0,7333	0,7353	0,7373	0,7392	0,7412	0,7431	42
48	0,7431	0,7451	0,7470	0,7490	0,7509	0,7528	0,7547	41
49	0,7547	0,7566	0,7585	0,7604	0,7623	0,7642	0,7660	40
50	0,7660	0,7679	0,7698	0,7716	0,7735	0,7753	0,7771	39
51	0,7771	0,7790	0,7808	0,7826	0,7844	0,7862	0,7880	38
52	0,7880	0,7898	0,7916	0,7934	0,7951	0,7969	0,7986	37
53	0,7986	0,8004	0,8021	0,8039	0,8056	0,8073	0,8090	36
54	0,8090	0,8107	0,8124	0,8141	0,8158	0,8175	0,8192	35
55	0,8192	0,8208	0,8225	0,8241	0,8258	0,8274	0,8290	34
56	0,8290	0,8307	0,8323	0,8339	0,8355	0,8371	0,8387	33
57	0,8387	0,8403	0,8418	0,8434	0,8450	0,8465	0,8480	32
58	0,8480	0,8496	0,8511	0,8526	0,8542	0,8557	0,8572	31
59	0,8572	0,8587	0,8601	0,8616	0,8631	0,8646	0,8660	30
60	0,8660	0,8675	0,8689	0,8704	0,8718	0,8732	0,8746	29
61	0,8746	0,8760	0,8774	0,8788	0,8802	0,8816	0,8829	28
62	0,8829	0,8843	0,8857	0,8870	0,8884	0,8897	0,8910	27
63	0,8910	0,8923	0,8936	0,8949	0,8962	0,8975	0,8988	26
64	0,8988	0,9001	0,9013	0,9026	0,9038	0,9051	0,9063	25
65	0,9063	0,9075	0,9088	0,9100	0,9112	0,9124	0,9135	24
66	0,9135	0,9147	0,9159	0,9171	0,9182	0,9194	0,9205	23
67	0,9205	0,9216	0,9228	0,9239	0,9250	0,9261	0,9272	22
68	0,9272	0,9283	0,9293	0,9304	0,9315	0,9325	0,9336	21
69	0,9336	0,9346	0,9356	0,9367	0,9377	0,9387	0,9397	20
70	0,9397	0,9407	0,9417	0,9426	0,9436	0,9446	0,9455	19
71	0,9455	0,9465	0,9474	0,9483	0,9492	0,9502	0,9511	18
72	0,9511	0,9520	0,9528	0,9537	0,9546	0,9555	0,9563	17
73	0,9563	0,9572	0,9580	0,9588	0,9596	0,9605	0,9613	16
74	0,9613	0,9621	0,9628	0,9636	0,9644	0,9652	0,9659	15
75	0,9659	0,9667	0,9674	0,9681	0,9689	0,9696	0,9703	14
76	0,9703	0,9710	0,9717	0,9724	0,9730	0,9737	0,9744	13
77	0,9744	0,9750	0,9757	0,9763	0,9769	0,9775	0,9781	12
78	0,9781	0,9787	0,9793	0,9799	0,9805	0,9811	0,9816	11
79	0,9816	0,9822	0,9827	0,9833	0,9838	0,9843	0,9848	10
80	0,9848	0,9853	0,9858	0,9863	0,9868	0,9872	0,9877	9
81	0,9877	0,9881	0,9886	0,9890	0,9894	0,9899	0,9903	8
82	0,9903	0,9907	0,9911	0,9914	0,9918	0,9922	0,9925	7
83	0,9925	0,9929	0,9932	0,9936	0,9939	0,9942	0,9945	6
84	0,9945	0,9948	0,9951	0,9954	0,9957	0,9959	0,9962	5
85	0,9962	0,9964	0,9967	0,9969	0,9971	0,9974	0,9976	4
86	0,9976	0,9978	0,9980	0,9981	0,9983	0,9985	0,9986	3
87	0,9986	0,9988	0,9989	0,9990	0,9992	0,9993	0,9994	2
88	0,9994	0,9996	0,9996	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	1
89	0,9998	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	↑0
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′ ←	grade

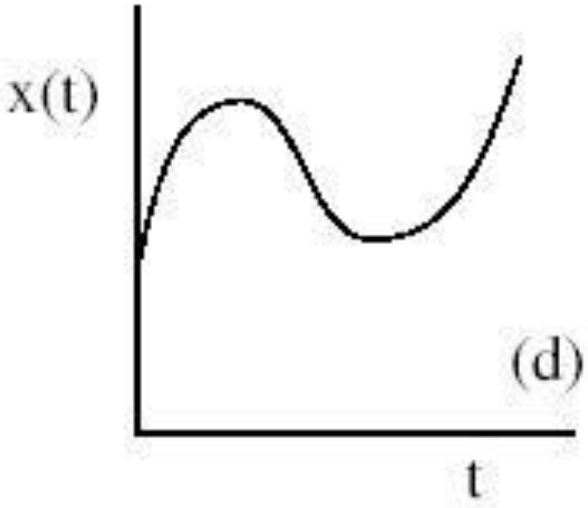
cosinus

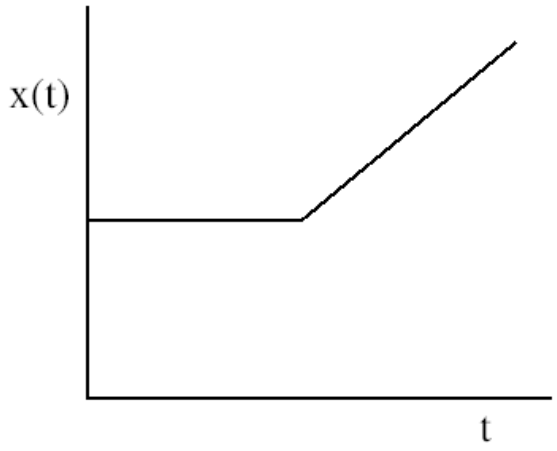




Descrierea grafica a unor miscari







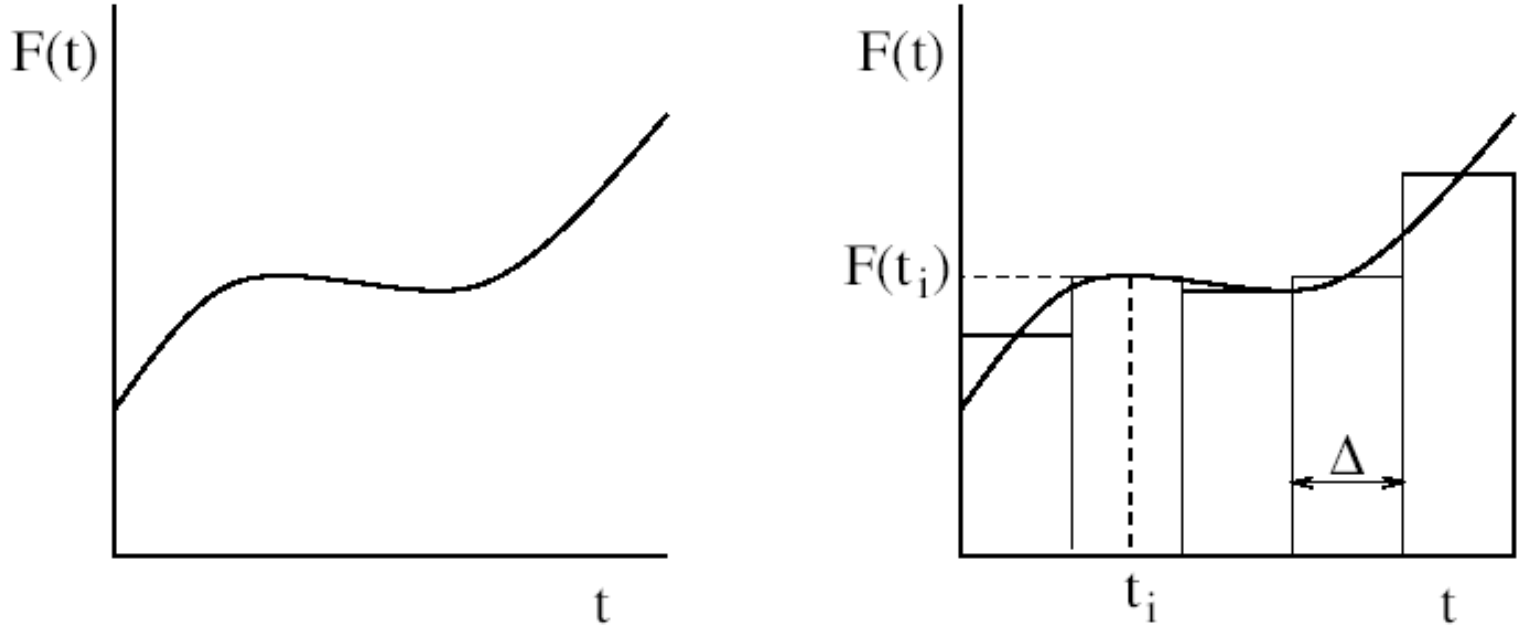
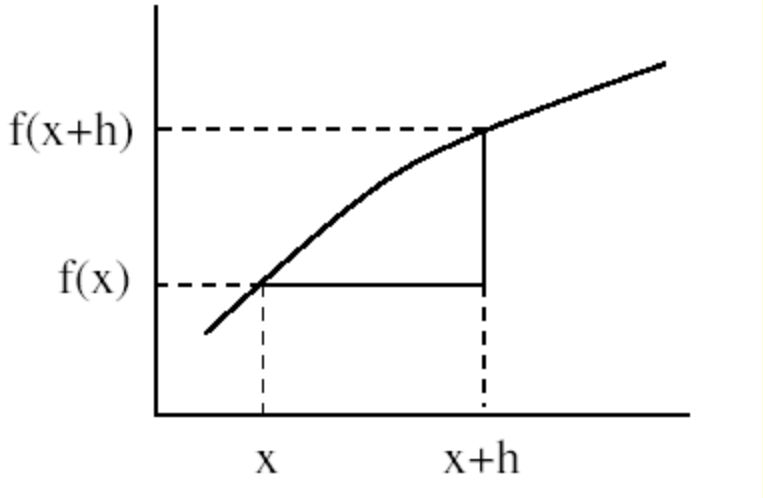
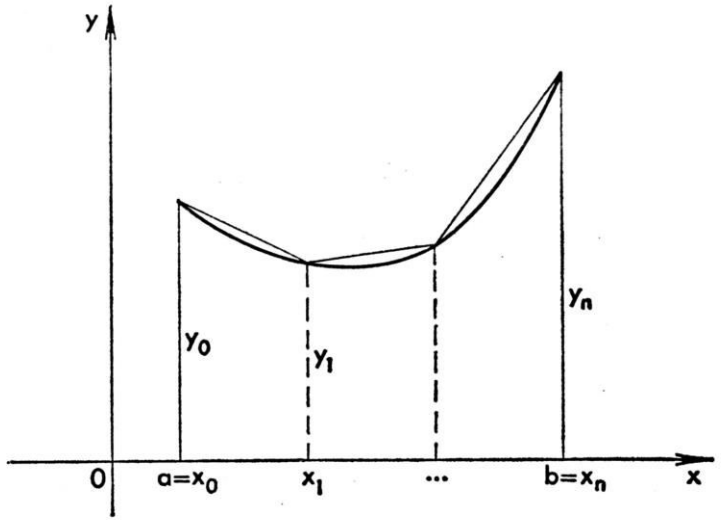
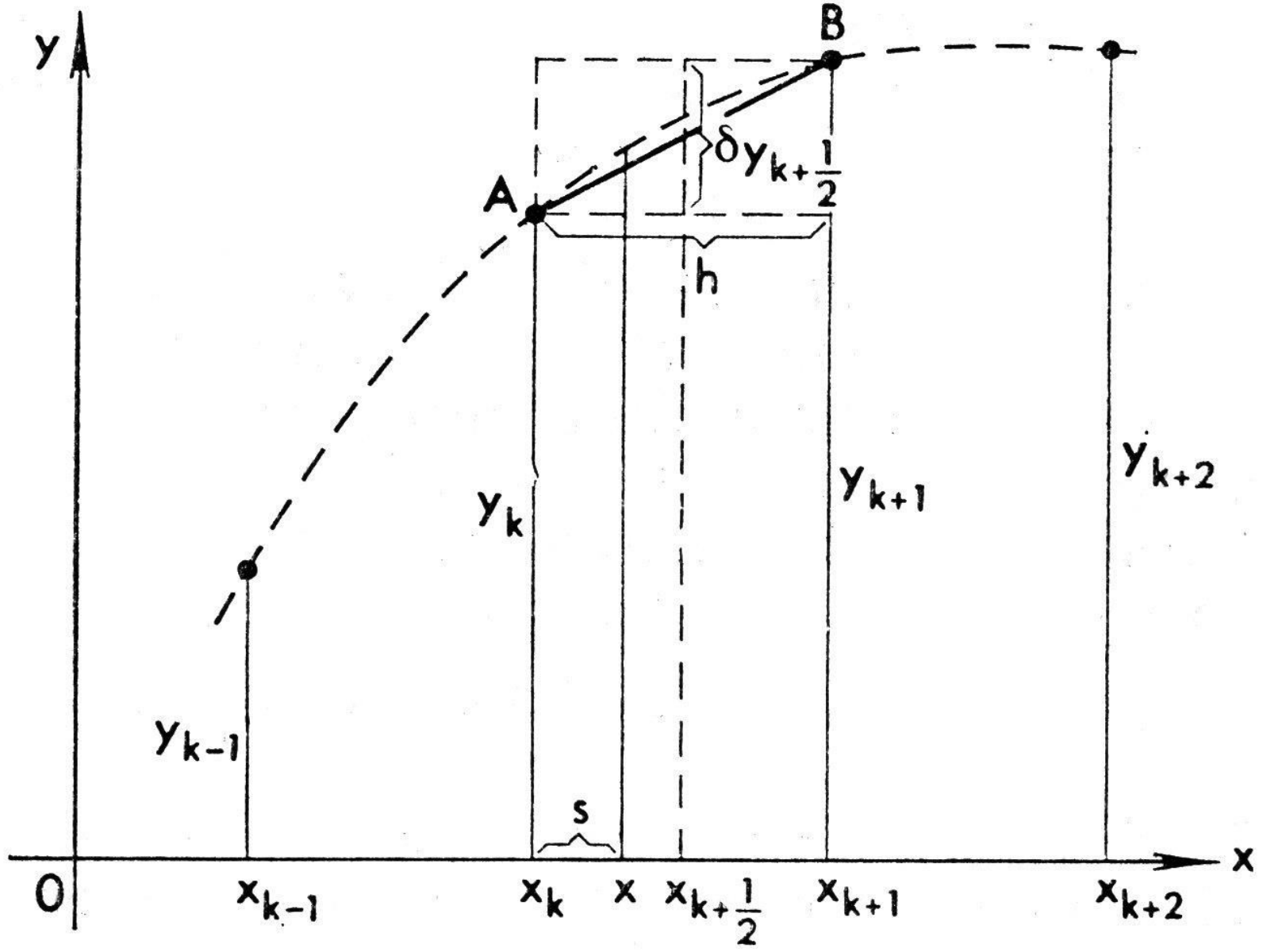


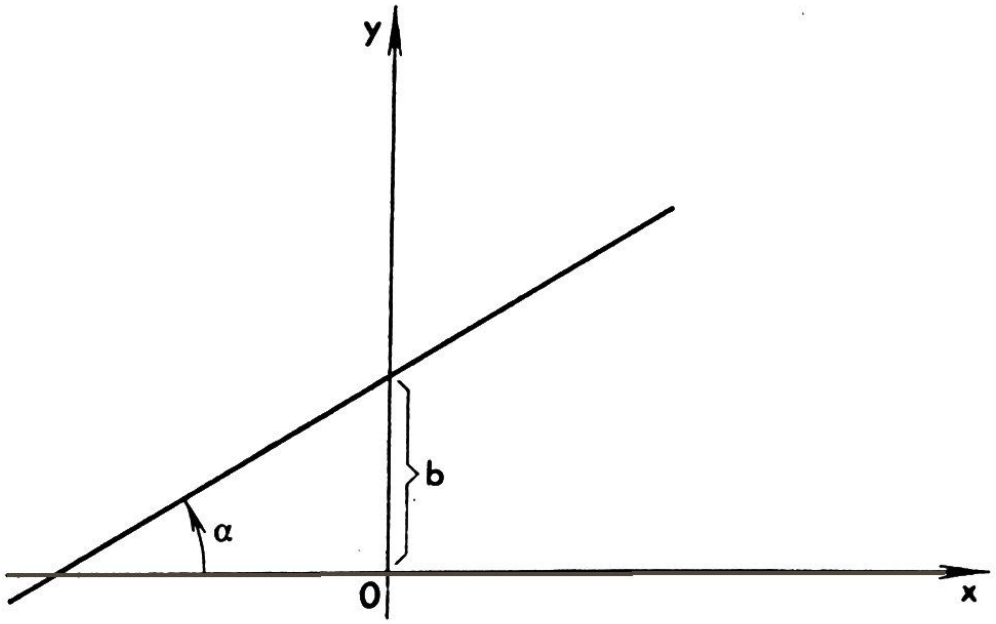
Figure 14.2: A continous function (left) and an approximation to this function that is constant within finite intervals (right).

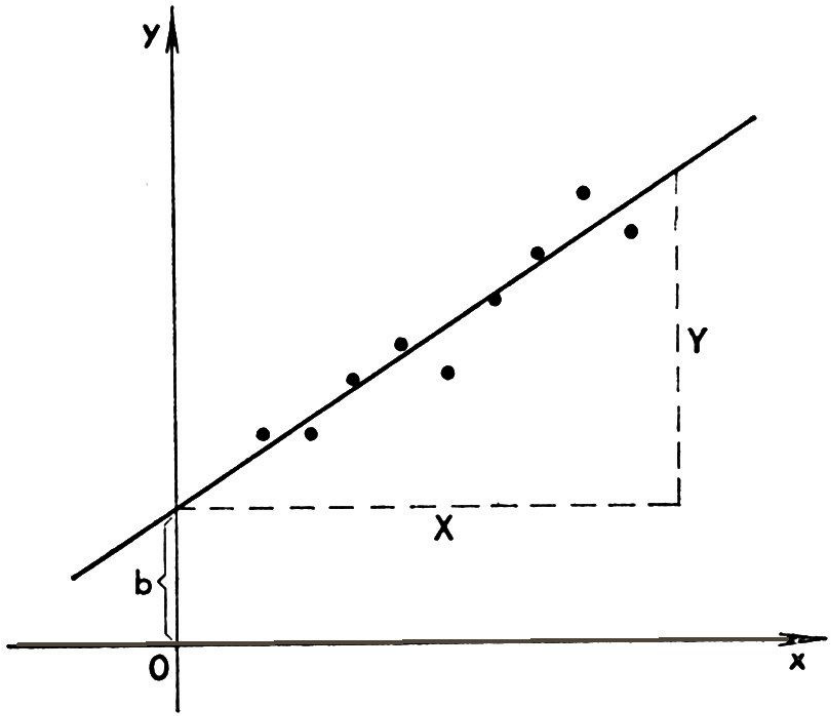






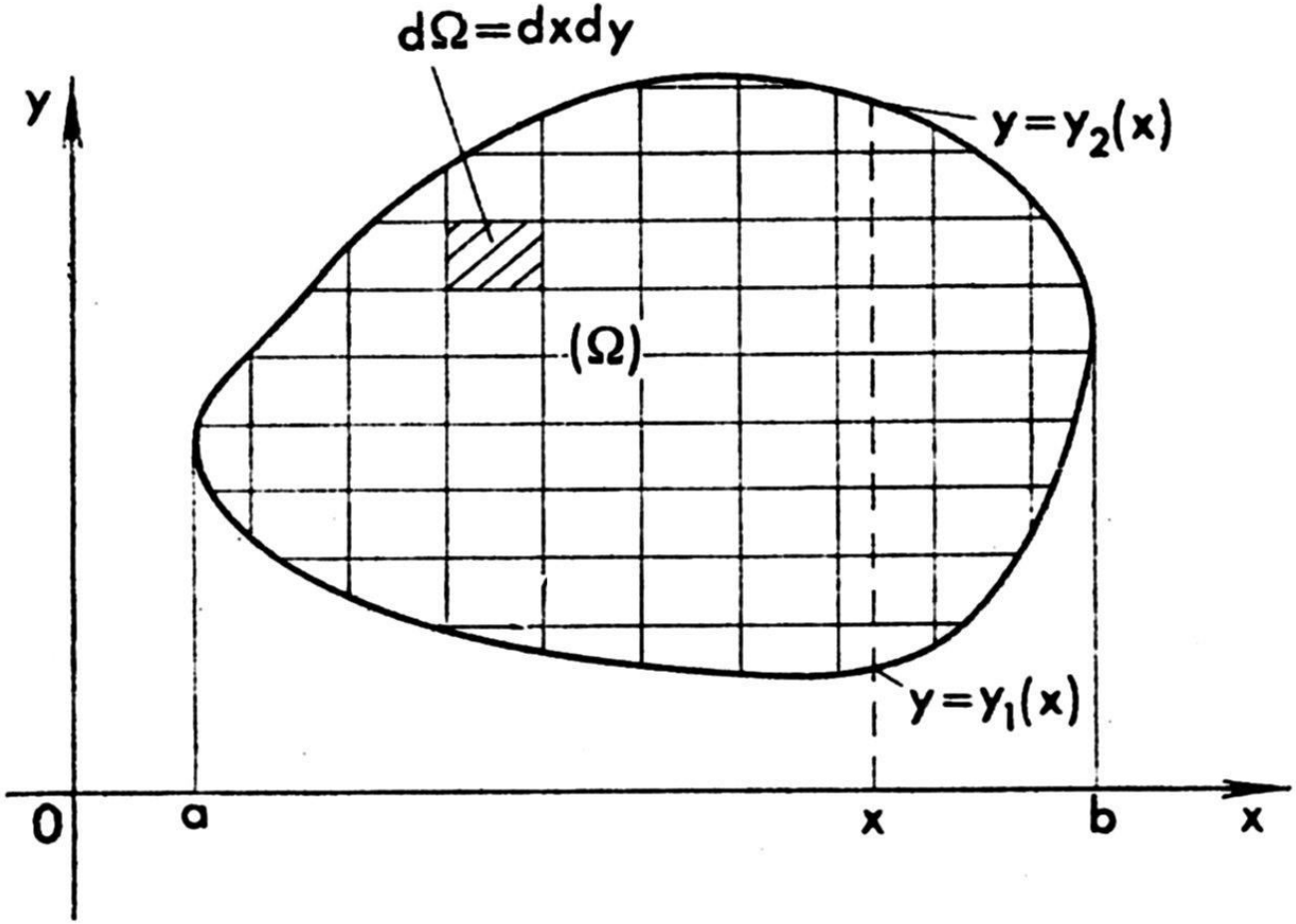
Functii continui; diferente finite

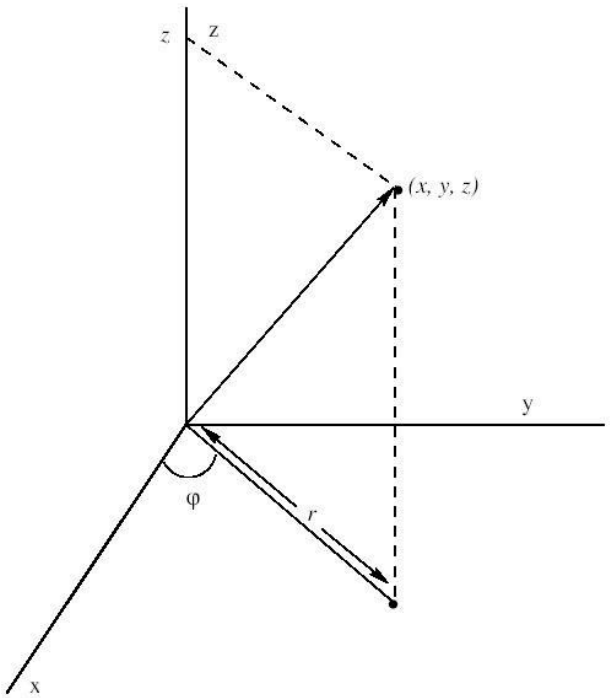


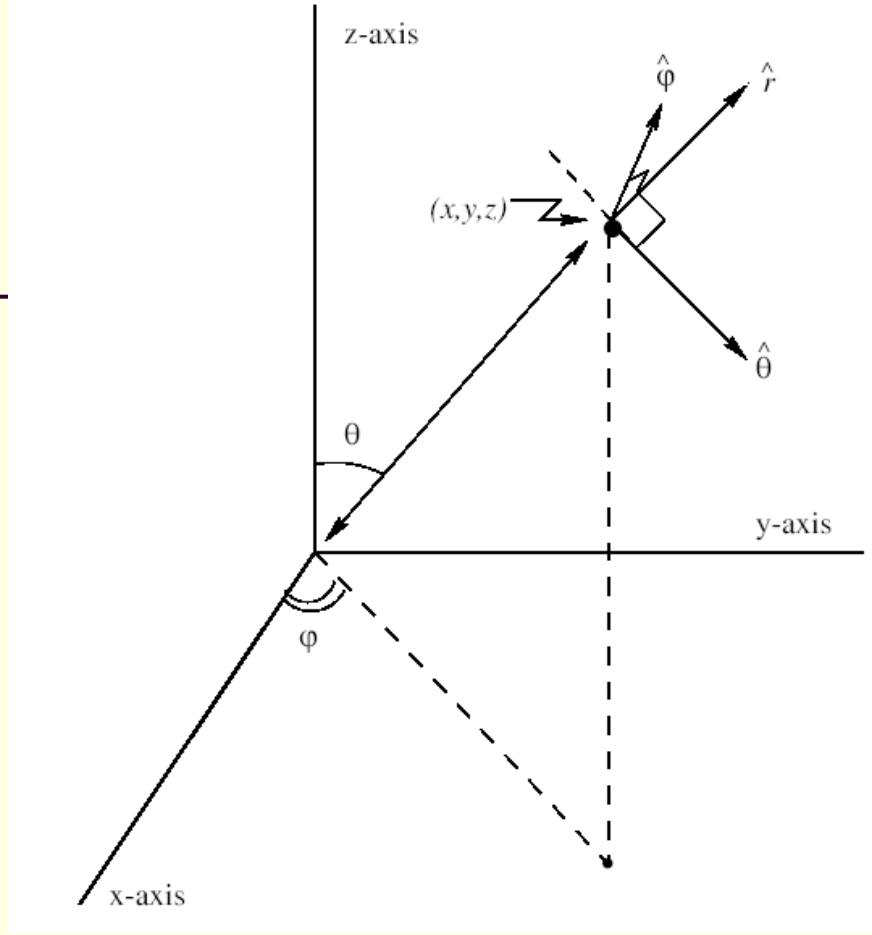


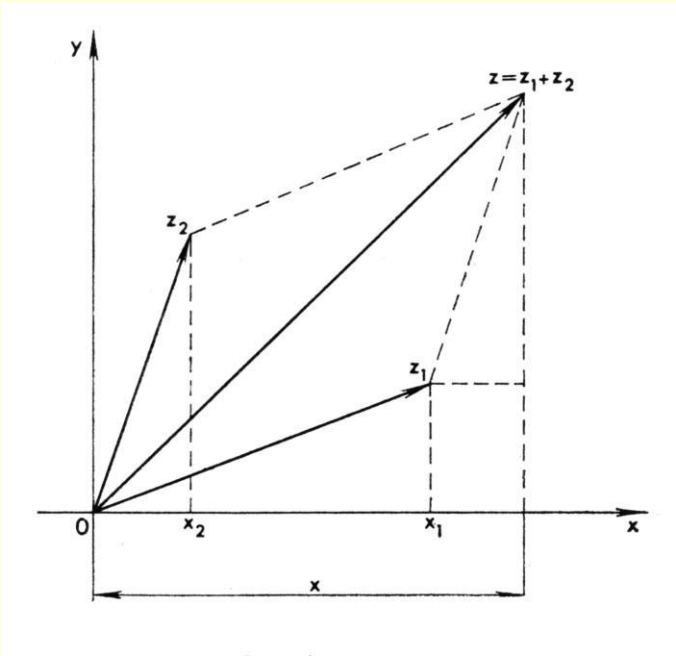
Fitare liniara a datelor dintr-un experiment

Aproximatia unei suprafete prin elemente finite









Axe de coordonate si sisteme de referinta

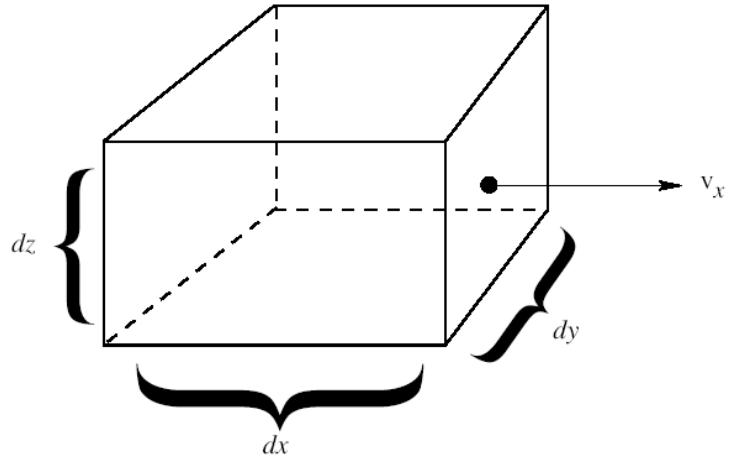


Figure 4.1: Definition of the geometric variables in the calculation of the flux of a vector field through an infinitesimal rectangular volume.

Tipuri de volume elementare care apar in situatii fizice concrete

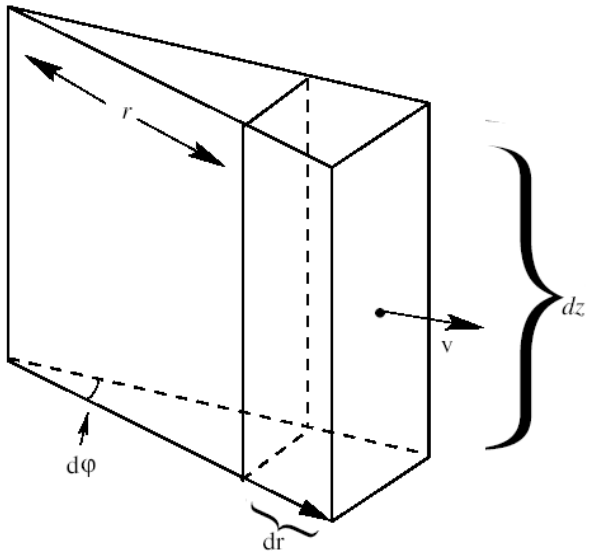
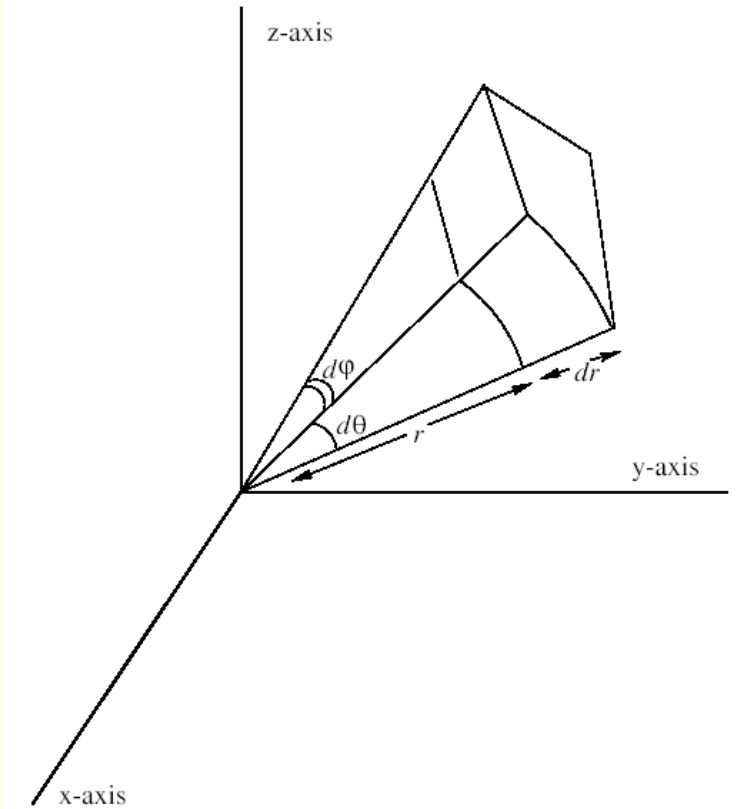
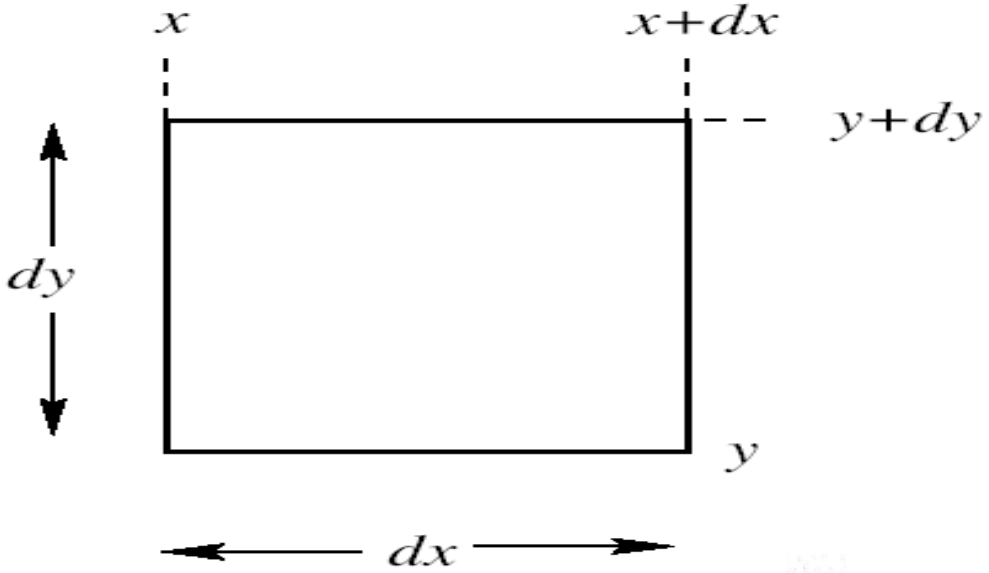
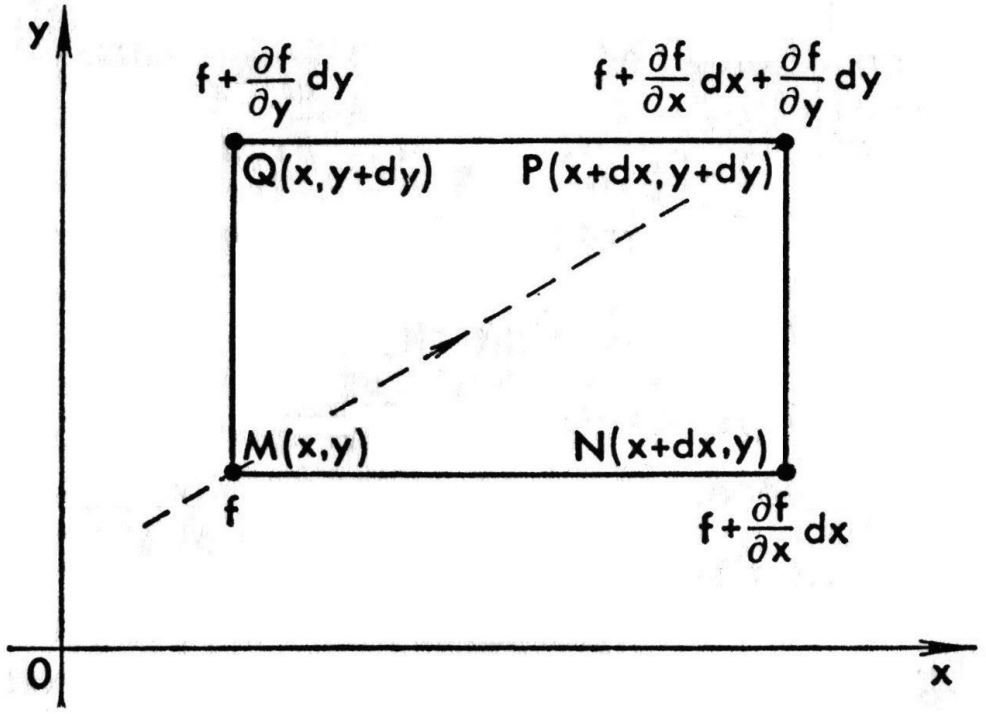


Figure 4.2: Definition of the geometric variables for the computation of the divergence in cylinder coordinates.



Variatii elementare pe suprafata plana





Free oscillations

Differential equation	$\frac{d^2x}{dt^2}+2\gamma\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0$	(3.196)	x	oscillating variable
			t	time
			γ	damping factor (per unit mass)
			ω_0	undamped angular frequency
Underdamped solution ($\gamma<\omega_0$)	$x=Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t+\phi)$	(3.197)	A	amplitude constant
	where $\omega=(\omega_0^2-\gamma^2)^{1/2}$	(3.198)	ϕ	phase constant
			ω	angular eigenfrequency
Critically damped solution ($\gamma=\omega_0$)	$x=e^{-\gamma t}(A_1+A_2t)$	(3.199)	A_i	amplitude constants
Overdamped solution ($\gamma>\omega_0$)	$x=e^{-\gamma t}(A_1e^{qt}+A_2e^{-qt})$	(3.200)		
	where $q=(\gamma^2-\omega_0^2)^{1/2}$	(3.201)		
Logarithmic decrement[a]	$\Delta=\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{2\pi\gamma}{\omega}$	(3.202)	Δ	logarithmic decrement
			a_n	nth displacement maximum
Quality factor	$Q=\frac{\omega_0}{2\gamma}\quad\left[\simeq\frac{\pi}{\Delta}\quad\text{if}\quad Q\gg1\right]$	(3.203)	Q	quality factor

[a]The *decrement* is usually the ratio of successive displacement *maxima* but is sometimes taken as the ratio of successive displacement *extrema*, reducing Δ by a factor of 2. Logarithms are sometimes taken to base 10, introducing a further factor of $\log_{10}e$.

Tabele de functii

	$m=0$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$
$n=1$	2.40482	3.83171	5.13562	6.38016	7.58834	8.77148
$n=2$	5.52007	7.01559	8.41724	9.76102	11.06471	12.33860
$n=3$	8.65372	10.17347	11.61984	13.01520	14.37254	15.70017
$n=4$	11.79153	13.32369	14.79595	16.22347	17.61597	18.98013
$n=5$	14.93091	16.47063	17.95982	19.4092	20.82693	22.21780
$n=6$	18.07106	19.61586	21.11700	22.58273	24.01902	25.43034
$n=7$	21.21163	22.76008	24.27011	25.74817	27.19909	28.62662

Table 16.1: The zeroes of the Bessel function $J_m(x)$.

Multumesc pentru atentie